Modélisation et optimisation de la production d'algues : défis et enjeux

Olivier Bernard, J. Ignacio Fierro u., Liu-Di LU, Jacques Sainte-Marie, Julien Salomon

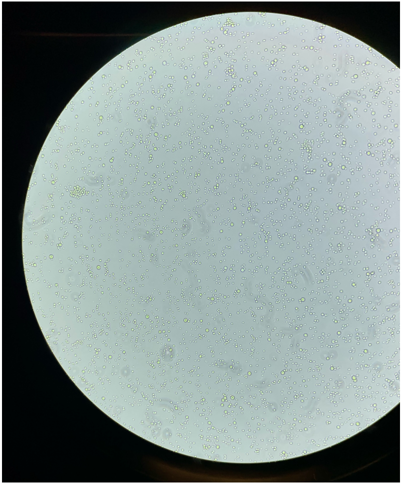
April 13, 2023

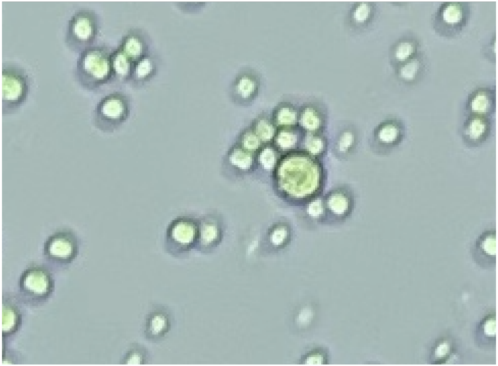
Introduction

★ Microalgues

- micro-organismes photosynthétiques,
- 2 à 50 micro-mètres,
- environment aquatique: rivière, lac, océan, etc,
- fixé CO_2.

Introduction





Introduction

★ Microalgues

- micro-organismes photosynthétiques,
- 2 à 50 micro-mètres,
- environment aquatique: rivière, lac, océan, etc,
- fixé CO_2.

★ Utilités

- treatment de l'eau usée,
- production de la biomasse,
- divers métabolites secondaires.

Introduction

Introduction

★ Microalgues

- micro-organismes photosynthétiques,
- 2 à 50 micro-mètres,
- environment aquatique: rivière, lac, océan, etc,
- fixé CO_2.

★ Utilités

- treatment de l'eau usée,
- production de la biomasse,
- divers métabolites secondaires.

★ Photobioréacteurs: industrie et laboratoire.

Introduction

Figure: Raceway pond (Hawaï)

Introduction

Figure: Raceway pond (Villefranche-sur-Mer)

Introduction

Figure: Biofilm

Introduction

Introduction

Introduction

★ Microalgues

- micro-organismes photosynthétiques,
- 2 à 50 micro-mètres,
- environment aquatique: rivière, lac, océan, etc,
- fixé CO_2.

★ Utilités

- treatment de l'eau usée,
- production de la biomasse,
- divers métabolites secondaires.

★ Photobioréacteurs: **Raceway pond**.

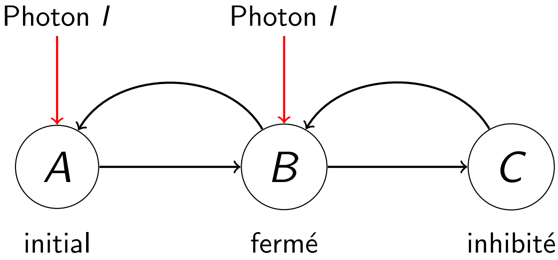
Introduction

- ★ Microalgues
  - micro-organismes photosynthétiques,
  - 2 à 50 micro-mètres,
  - environment aquatique: rivière, lac, océan, etc,
  - fixé CO_2.
- ★ Utilités
  - treatment de l'eau usée,
  - production de la biomasse,
  - divers métabolites secondaires.
- ★ Photobioréacteurs: **Raceway pond**.
- ★ Facteur d'impact: **lumière**, température, pH, nutriments, etc.

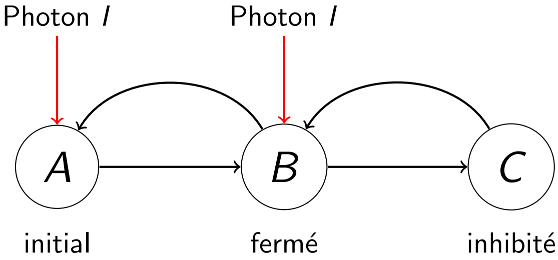
Introduction

- Microalgues
  - micro-organismes photosynthétiques,
  - 2 à 50 micro-mètres,
  - environment aquatique: rivière, lac, océan, etc,
  - fixé CO_2.
- Utilités
  - treatment de l'eau usée,
  - production de la biomasse,
  - divers métabolites secondaires.
- Photobioréacteurs: **Raceway pond**.
- Facteur d'impact: **lumière**, température, pH, nutriments, etc.
- Modèle biologie: **modèle de Han**, modèle Haldane, modèle de Droop, etc.

Modèle de Han



Modèle de Han



$$
\begin{cases}
\dot{A} = -\sigma I A + \frac{B}{\tau} \\
\dot{B} = \sigma I A - \frac{B}{\tau} + k_r C - k_d \sigma I B \\
\dot{C} = -k_r C + k_d \sigma I B
\end{cases}
$$

avec $A + B + C = 1$.

Modèle de Han

- Eliminer B

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_d \end{pmatrix} \left[- \begin{pmatrix} \sigma I + \frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} \\ \sigma I & \sigma I + \frac{k_r}{k_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \\ \sigma I \end{pmatrix} \right],$$

un système lent-rapid car $k_d \approx 10^{-4}$.

Modèle de Han

- Eliminer B

$$\begin{pmatrix}\dot{A}\\ \dot{C}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k_d\end{pmatrix}\left[-\begin{pmatrix}\sigma I + \frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau}\\ \sigma I & \sigma I + \frac{k_r}{k_d}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{\tau}\\ \sigma I\end{pmatrix}\right],$$

un système lent-rapid car $k_d \approx 10^{-4}$.

- Modèle avec T grand (modèle de base fréquence)

$$\dot{C} = -(\frac{k_d\tau(\sigma I)^2}{1+\tau\sigma I} + k_r)C + \frac{k_d\tau(\sigma I)^2}{1+\tau\sigma I}.$$

Modèle de Han

- Eliminer B

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_d \end{pmatrix} \left[-\begin{pmatrix} \sigma I + \frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} \\ \sigma I & \sigma I + \frac{k_r}{k_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \\ \sigma I \end{pmatrix} \right],$$

un système lent-rapid car $k_d \approx 10^{-4}$.

- Modèle avec T grand (modèle de base fréquence)

$$\dot{C} = -(\frac{k_d \tau (\sigma I)^2}{1 + \tau \sigma I} + k_r) C + \frac{k_d \tau (\sigma I)^2}{1 + \tau \sigma I}.$$

- Modèle avec T petit (modèle de haute fréquence)

$$\dot{A} = -\left(\sigma I + \frac{1}{\tau}\right) A + \frac{k_r - k_d \sigma \overline{IA}}{\tau (k_d \sigma \bar{I} + k_r)}.$$

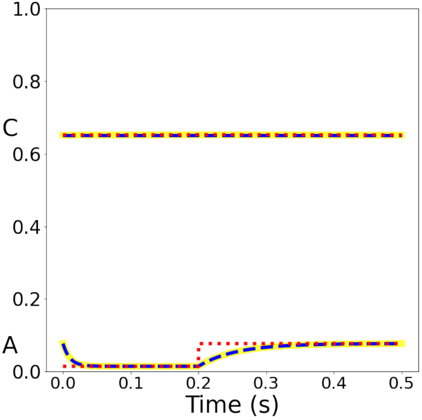


Figure: $T = 0.5\,\text{s}$.

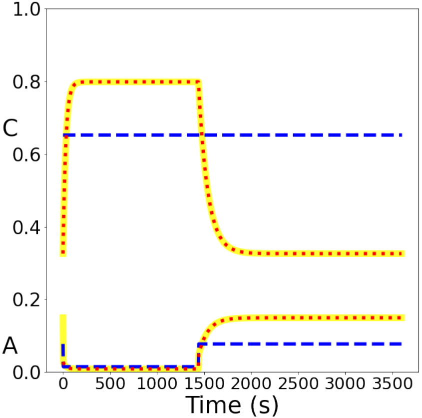


Figure: $T = 3600\,\mathrm{s}$.

Taux de croissance et modèle de lumière

- Définition dans le contexte du modèle de Han

$$\mu(A, I) := k\sigma I A$$

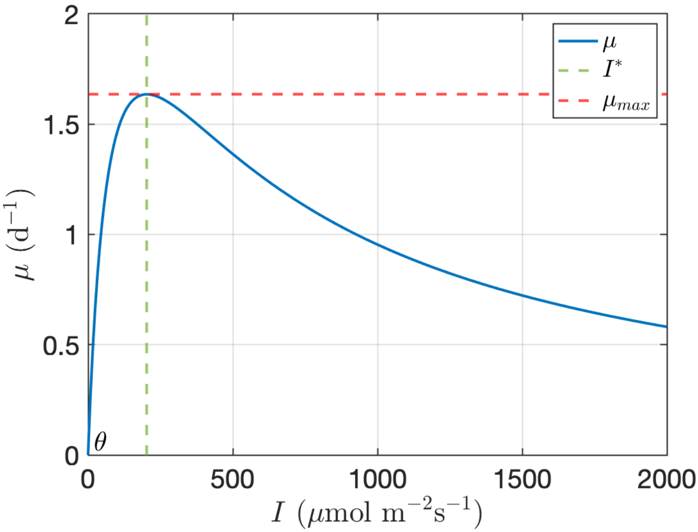
$$\Big\downarrow \quad \text{état équilibre}$$

$$\mu(I) = \mu_{\max} \frac{I}{I + \frac{\mu_{\max}}{\theta}(\frac{I}{I^*} - 1)^2} \text{ (Haldane)}$$

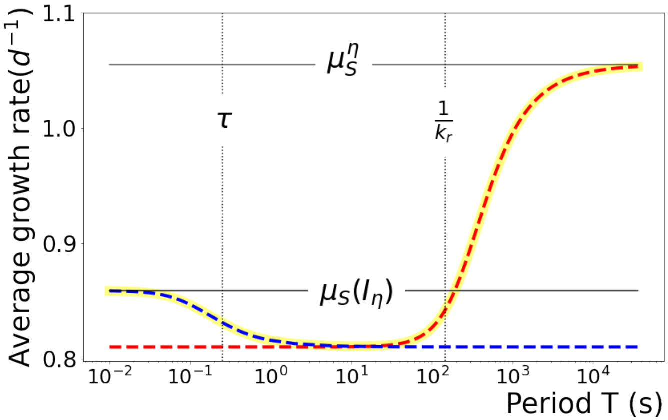
avec

$$\theta = k\sigma, \quad I^* = \sqrt{\frac{k_r}{k_d \tau \sigma^2}}, \quad \mu_{\max} = \frac{k\sigma}{\tau\sigma + 2\sqrt{\frac{k_d \tau \sigma^2}{k_r}}}.$$

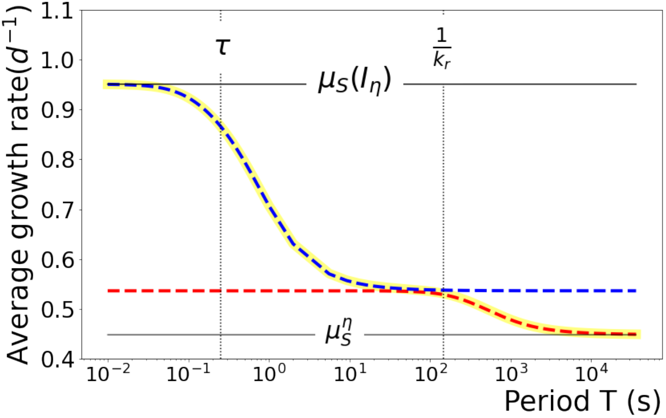
Taux de croissance et modèle de lumière



Taux de croissance et modèle de lumière



Taux de croissance et modèle de lumière



Taux de croissance et modèle de lumière

- Définition dans le contexte du modèle de Han

$$\mu(A, I) := k\sigma I A$$

$$\Big\downarrow \quad \text{état équilibre}$$

$$\mu(I) = \mu_{\max} \frac{I}{I + \frac{\mu_{\max}}{\theta}(\frac{I}{I^*} - 1)^2} \text{ (Haldane)}$$

avec

$$\theta = k\sigma, \quad I^* = \sqrt{\frac{k_r}{k_d \tau \sigma^2}}, \quad \mu_{\max} = \frac{k\sigma}{\tau\sigma + 2\sqrt{\frac{k_d \tau \sigma^2}{k_r}}}.$$

- Biomasse

$$\dot{X} = (\mu - R - D)X.$$

Taux de croissance et modèle de lumière

- Définition dans le contexte du modèle de Han

$$\mu(A, I) := k\sigma I A$$

$$\Big\downarrow \quad \text{état équilibre}$$

$$\mu(I) = \mu_{\max} \frac{I}{I + \frac{\mu_{\max}}{\theta}(\frac{I}{I^*} - 1)^2} \text{ (Haldane)}$$

avec

$$\theta = k\sigma, \quad I^* = \sqrt{\frac{k_r}{k_d \tau \sigma^2}}, \quad \mu_{\max} = \frac{k\sigma}{\tau\sigma + 2\sqrt{\frac{k_d \tau \sigma^2}{k_r}}}.$$

- Biomasse

$$\dot{X} = (\mu - R - D)X.$$

- Loi de Beer-Lambert:

$$I(z) = I_s \exp(-\varepsilon z).$$

Modélisation et optimisation du raceway pond

Raceway ponds:

- le plus répandu et le moins cher,
- bassin avec roue à aubes.

Modélisation et optimisation du raceway pond

Raceway ponds:

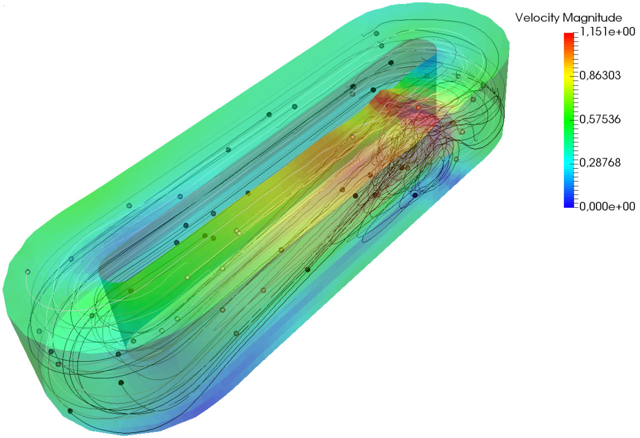
- le plus répandu et le moins cher,
- bassin avec roue à aubes.

Difficultés:

- système complex,
- simulation couteuse,
- difficile à formuler le problème d'optimisation.

Modélisation et optimisation du raceway pond

Simulation des trajectoires avec le code FreshKiss3D (*Demory et al.* 2018).



Modélisation et optimisation du raceway pond

Raceway ponds:

- le plus répandu et le moins cher,
- bassin avec roue à aubes.

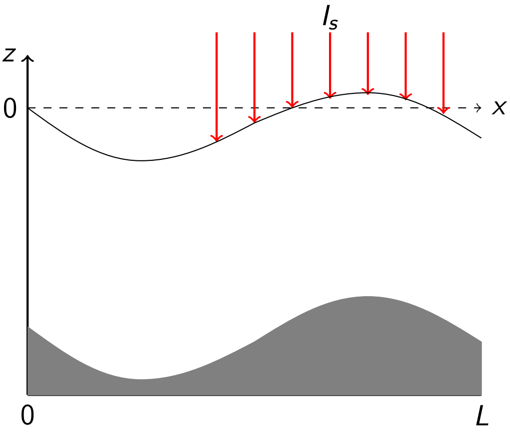
Difficultés:

- système complex,
- simulation couteuse,
- difficile à formuler le problème d'optimisation.

Paramètres à optimiser:

- topographie,

1D illustration



Modélisation et optimisation du raceway pond

Raceway ponds:

- le plus répandu et le moins cher,
- bassin avec roue à aubes.

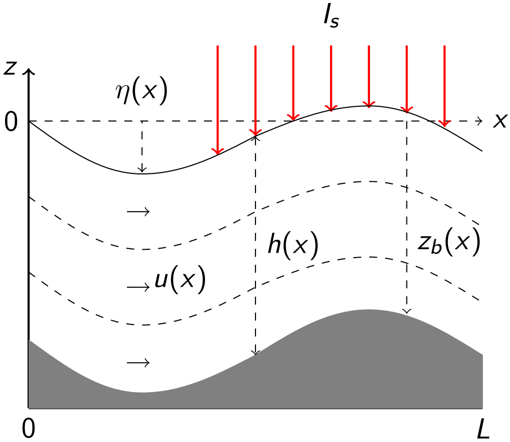
Difficultés:

- système complex,
- simulation couteuse,
- difficile à formuler le problème d'optimisation.

Paramètres à optimiser:

- topographie,
- mélange.

1D Illustration



Equations de Saint-Venant

- Equation de Saint-Venant stationnaire 1D

$$\partial_x(hu) = 0, \quad \partial_x(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) = -gh\partial_x z_b.$$

Equations de Saint-Venant

- Relation entre z_b et h

$$z_b = \frac{M_0}{g} - \frac{Q_0^2}{2gh^2} - h,$$

$Q_0, M_0 \in \mathbb{R}^+$ sont deux constantes.

Equations de Saint-Venant

- Relation entre z_b et h

$$z_b = \frac{M_0}{g} - \frac{Q_0^2}{2gh^2} - h,$$

  $Q_0, M_0 \in \mathbb{R}^+$ sont deux constantes.

- Nombre de Froude:

$$Fr := \frac{u}{\sqrt{gh}}.$$

  $Fr < 1$**: l'écoulement fluvial**,

  $Fr > 1$: l'écoulement torrentiel.

Equations de Saint-Venant

- Relation entre z_b et h

$$z_b = \frac{M_0}{g} - \frac{Q_0^2}{2gh^2} - h,$$

  $Q_0, M_0 \in \mathbb{R}^+$ sont deux constantes.
- Nombre de Froude:

$$Fr := \frac{u}{\sqrt{gh}}.$$

  $Fr < 1$: l'écoulement fluvial,
  $Fr > 1$: l'écoulement torrentiel.
- Pour une topographie régulière donnée z_b, il existe **une unique** solution positive régulière h qui satisfait la condition $Fr < 1$ (*Michel-Dansac et al* 2016).

Equations de Saint-Venant

- Relation entre z_b et h

$$z_b = \frac{M_0}{g} - \frac{Q_0^2}{2gh^2} - h,$$

  $Q_0, M_0 \in \mathbb{R}^+$ sont deux constantes.
- Nombre de Froude:

$$Fr := \frac{u}{\sqrt{gh}}.$$

  $Fr < 1$: **l'écoulement fluvial**,
  $Fr > 1$: l'écoulement torrentiel.
- Pour une topographie régulière donnée z_b, il existe **une unique** solution positive régulière h qui satisfait la condition $Fr < 1$ (*Michel-Dansac et al* 2016).
- Une formulation **indépendante du temps** du trajectoire Lagrangien commencé par $z(0)$:

$$z(x) = \eta(x) + \frac{h(x)}{h(0)}(z(0) - \eta(0)).$$

Problème d'optimisation

- Objective: optimiser la topographie z_b.

Problème d'optimisation

- Objective: optimiser la topographie z_b.
- Fonction de coût: taux de croissance moyen.

$$\bar{\mu}_\infty := \frac{1}{V}\int_0^L \int_{z_b(x)}^{\eta(x)} \mu\big(C(x,z), I(x,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

Problème d'optimisation

- Objective: optimiser la topographie z_b.
- Fonction de coût: taux de croissance moyen.

$$\bar{\mu}_\infty := \frac{1}{V}\int_0^L \int_{z_b(x)}^{\eta(x)} \mu\big(C(x,z), I(x,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \text{discretization verticale}$$

$$\bar{\mu}_{N_z} = \frac{1}{VN_z}\sum_{i=1}^{N_z}\int_0^L \mu(C_i, I_i)h\mathrm{d}x$$

Problème d'optimisation

- Objective: optimiser la topographie z_b.
- Fonction de coût: taux de croissance moyen.

$$\bar{\mu}_\infty := \frac{1}{V}\int_0^L \int_{z_b(x)}^{\eta(x)} \mu\big(C(x,z), I(x,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \text{ discretization verticale}$$

$$\bar{\mu}_{N_z} = \frac{1}{VN_z}\sum_{i=1}^{N_z}\int_0^L \mu(C_i, I_i)h\mathrm{d}x$$

- Volume du système: $V = \int_0^L h(x)\mathrm{d}x$.

Problème d'optimisation

- Objective: optimiser la topographie z_b.
- Fonction de coût: taux de croissance moyen.

$$\bar{\mu}_\infty := \frac{1}{V}\int_0^L \int_{z_b(x)}^{\eta(x)} \mu\big(C(x,z), I(x,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \text{discretization verticale}$$

$$\bar{\mu}_{N_z} = \frac{1}{VN_z}\sum_{i=1}^{N_z}\int_0^L \mu(C_i, I_i)h\mathrm{d}x$$

- Volume du système: $V = \int_0^L h(x)\mathrm{d}x$.
- Paramétriser h par un vecteur $a := [a_1, \cdots, a_{N_a}] \in \mathbb{R}^{N_a}$, e.g. Truncated Fourier.

Problème d'optimisation

- Objective: optimiser la topographie z_b.
- Fonction de coût: taux de croissance moyen.

$$\bar{\mu}_\infty := \frac{1}{V} \int_0^L \int_{z_b(x)}^{\eta(x)} \mu\big(C(x,z), I(x,z)\big) \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \text{discretization verticale}$$

$$\bar{\mu}_{N_z} = \frac{1}{VN_z} \sum_{i=1}^{N_z} \int_0^L \mu(C_i, I_i) h \mathrm{d}x$$

- Volume du système: $V = \int_0^L h(x)\mathrm{d}x$.
- Paramétriser h par un vecteur $a := [a_1, \cdots, a_{N_a}] \in \mathbb{R}^{N_a}$, e.g. Truncated Fourier.
- Chaine du calcul:

$$h(a) \to z_i \to I_i \to C_i \to \bar{\mu}_{N_z}.$$

Problème d'optimisation

- Objective: optimiser la topographie z_b.
- Fonction de coût: taux de croissance moyen.

$$\bar{\mu}_\infty := \frac{1}{V}\int_0^L \int_{z_b(x)}^{\eta(x)} \mu\big(C(x,z), I(x,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \text{discretization verticale}$$

$$\bar{\mu}_{N_z} = \frac{1}{VN_z}\sum_{i=1}^{N_z}\int_0^L \mu(C_i, I_i)h\mathrm{d}x$$

- Volume du système: $V = \int_0^L h(x)\mathrm{d}x$.
- Paramétriser h par un vecteur $a := [a_1, \cdots, a_{N_a}] \in \mathbb{R}^{N_a}$, e.g. Truncated Fourier.
- Chaine du calcul:

$$h(a) \to z_i \to I_i \to C_i \to \bar{\mu}_{N_z}.$$

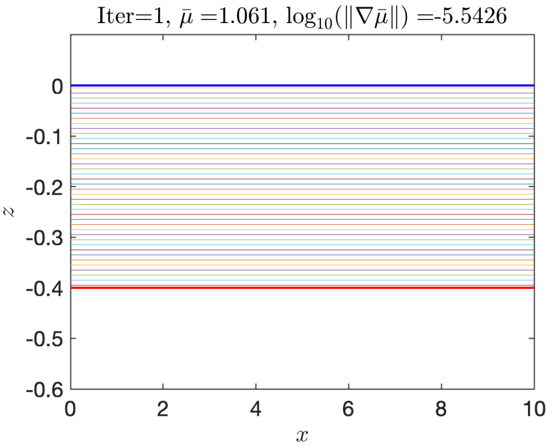
- Méthode de l'adjoint $\to$ $\nabla\bar{\mu}_{N_z}(a)$.

Topographie optimale

Nombre de parameters: $N_a = 5$.

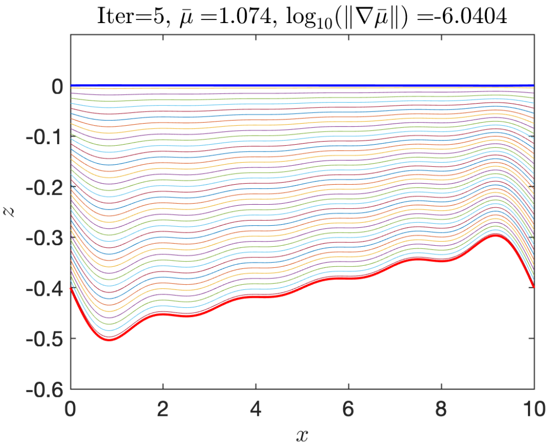
Nombre de trajectories: $N_z = 40$.

Initialisation: topographie plate.



Topographie optimale

Nombre de parameters: $N_a = 5$.
Nombre de trajectories: $N_z = 40$.
Initialisation: topographie plate.

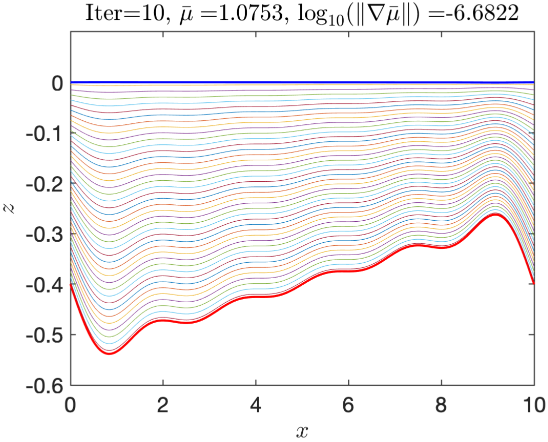


Topographie optimale

Nombre de parameters: $N_a = 5$.

Nombre de trajectories: $N_z = 40$.

Initialisation: topographie plate.

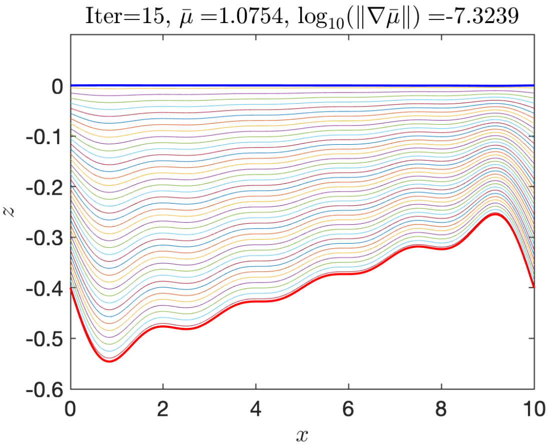


Topographie optimale

Nombre de parameters: $N_a = 5$.

Nombre de trajectories: $N_z = 40$.

Initialisation: topographie plate.

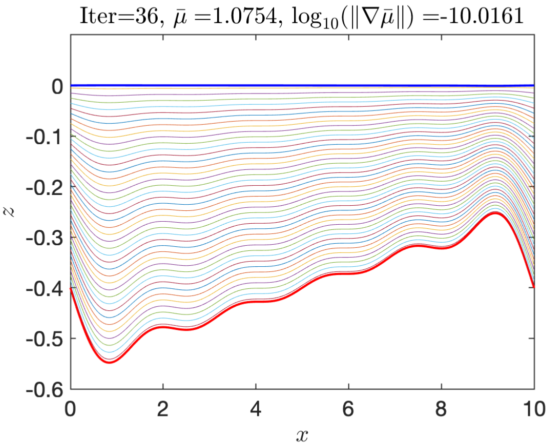


Topographie optimale

Nombre de paramètres: $N_a = 5$.

Nombre de trajectories: $N_z = 40$.

Initialisation: topographie plate.



Régime permanent

Assumption

Etat de photoinhibition C est périodique c-à-d $C_i(L) = C_i(0)$, $i = [1, \cdots, N_z]$.

Régime permanent

Assumption

Etat de photoinhibition C est périodique c-à-d $C_i(L) = C_i(0)$, $i = [1, \cdots, N_z]$.

Theorem (Topographie plate)

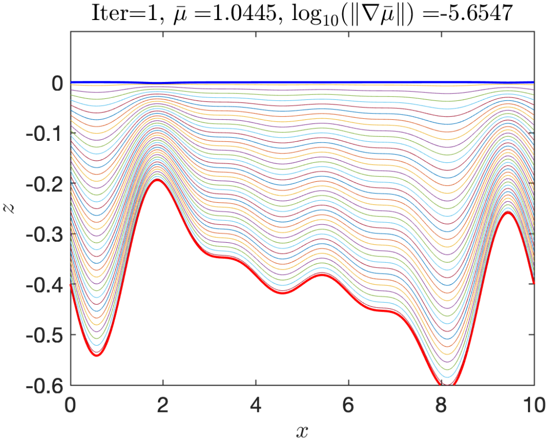
Supposons que le volume du système V est constant, alors $\nabla \bar{\mu}_{N_z}(0) = 0$.

Régime permanent

Nombre de paramètres: $N_a = 5$.

Nombre de trajectories: $N_z = 40$.

Initialisation: topographie aléatoire.

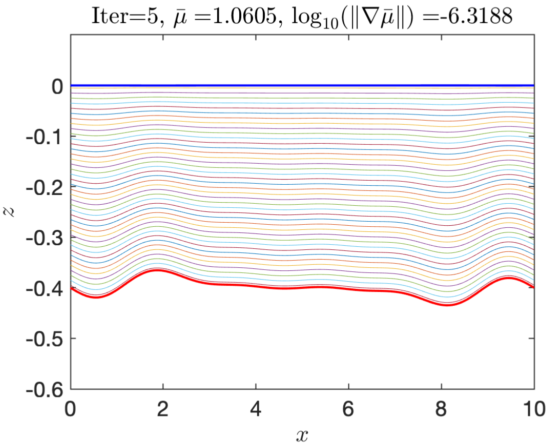


Régime permanent

Nombre de paramètres: $N_a = 5$.

Nombre de trajectories: $N_z = 40$.

Initialisation: topographie aléatoire.

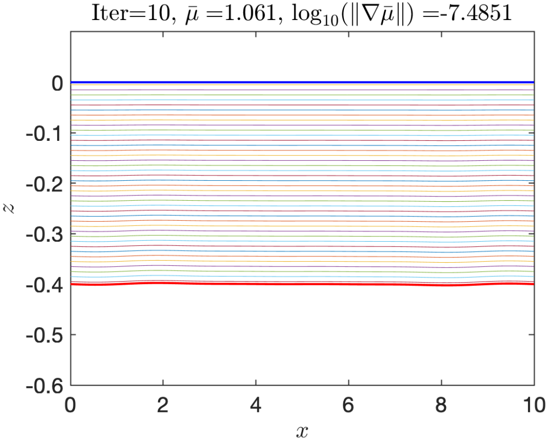


Régime permanent

Nombre de paramètres: $N_a = 5$.

Nombre de trajectories: $N_z = 40$.

Initialisation: topographie aléatoire.

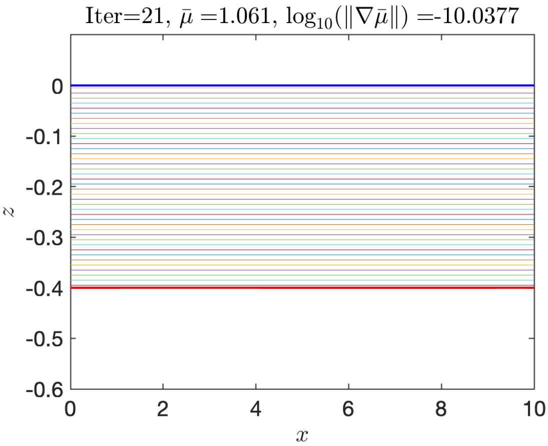


Régime permanent

Nombre de paramètres: $N_a = 5$.

Nombre de trajectories: $N_z = 40$.

Initialisation: topographie aléatoire.



Modélisation du mélange

Modélisation du mélange

Assumption (mélange parfait)

A chaque nouveau tour, les algues situées à la profondeur z_i **sont entièrement transférées dans la position** z_j lors de leur passage dans le dispositif de mélange.

Modélisation du mélange

Assumption (mélange parfait)

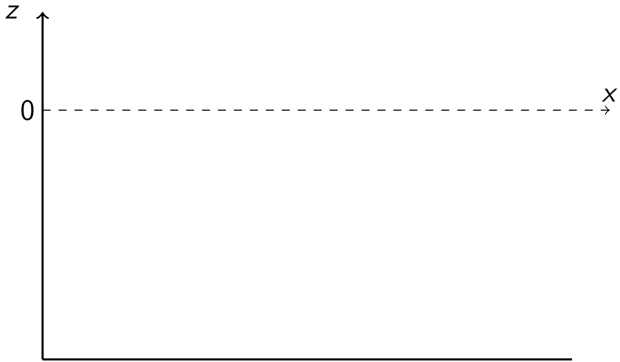
A chaque nouveau tour, les algues situées à la profondeur z_i **sont entièrement transférées dans la position** z_j lors de leur passage dans le dispositif de mélange.

Notations

On note par $\mathcal{P}$ l'ensemble des **matrices de permutation** de taille $N_z \times N_z$ et par $\mathfrak{S}_{N_z}$ l'ensemble associé des permutations de N_z élements.

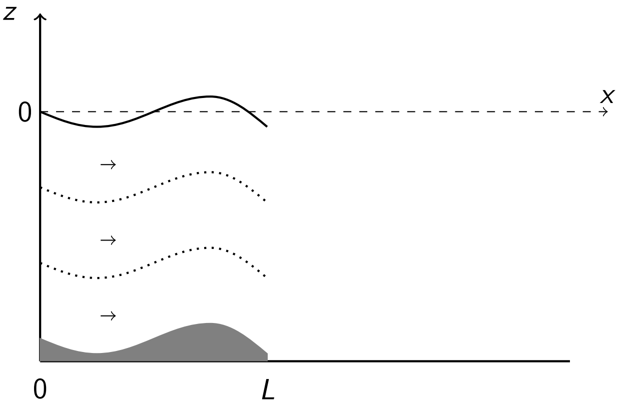
Modélisation du mélange

Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.



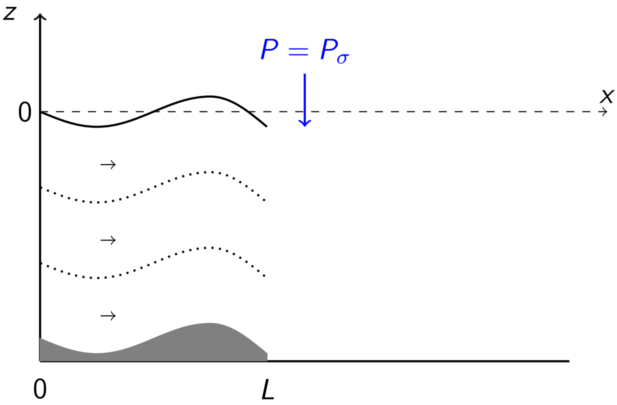
Modélisation du mélange

Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.



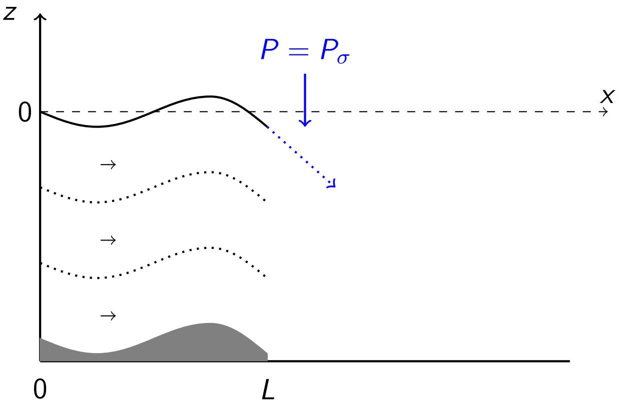
Modélisation du mélange

Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.



Modélisation du mélange

Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.



Modélisation du mélange

Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.

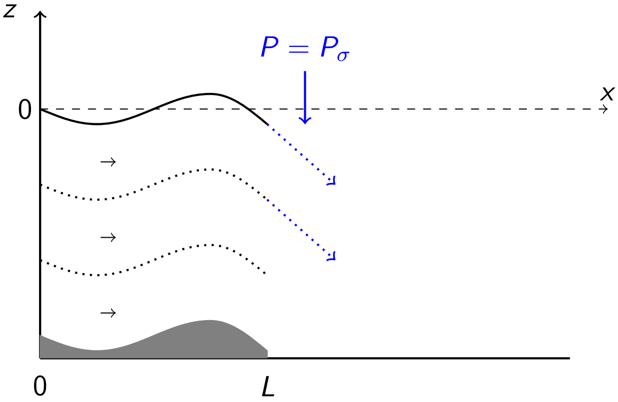
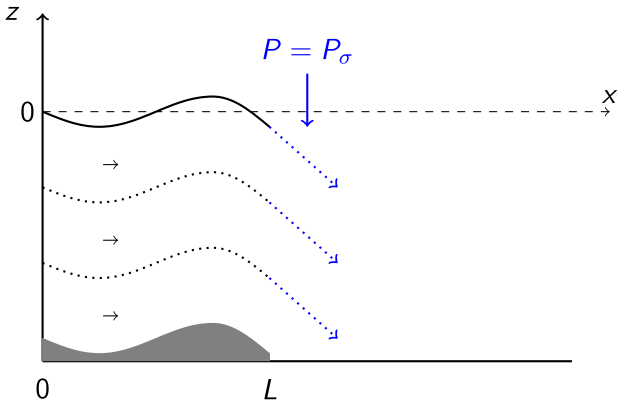


Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.



Modélisation du mélange

Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.

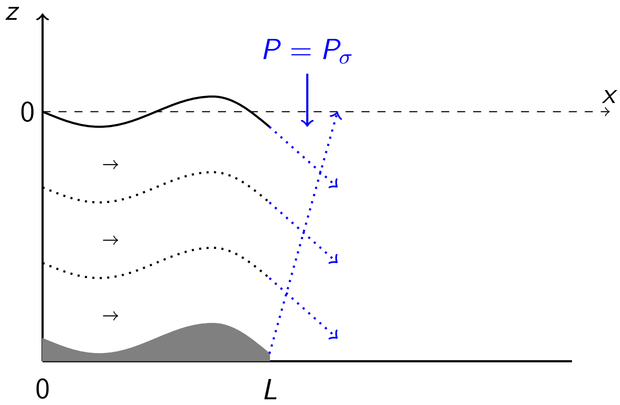


Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.

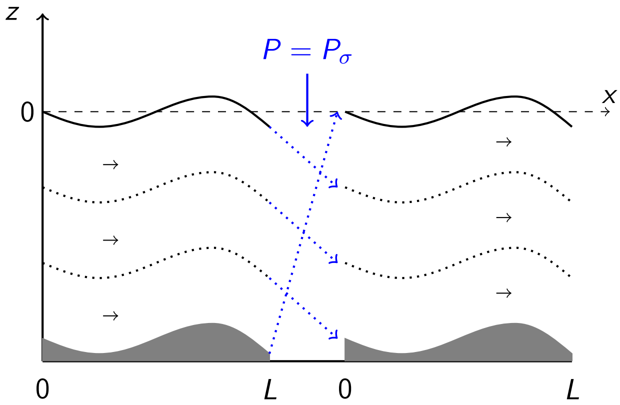
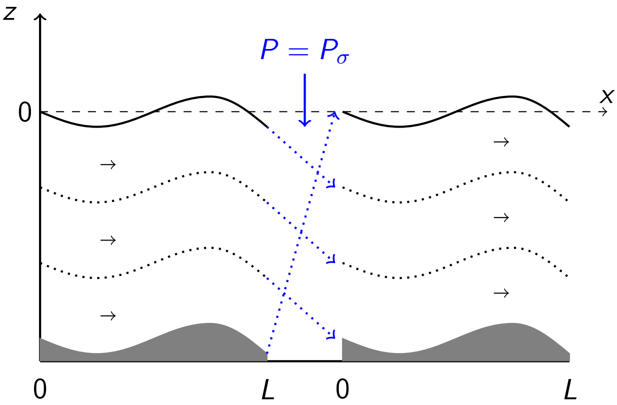
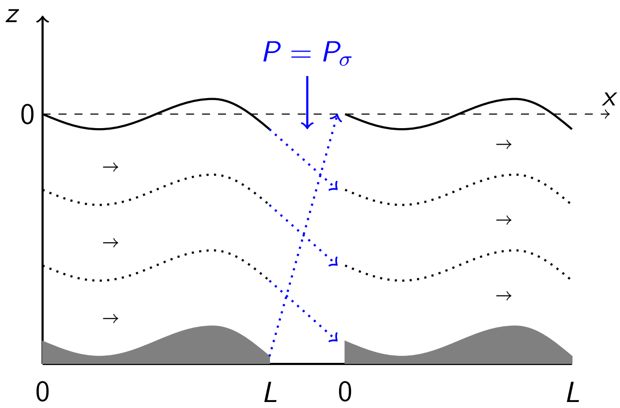


Illustration avec la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.



Choix de la période?

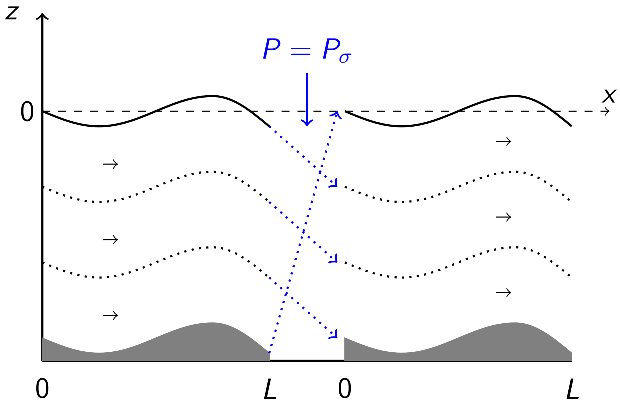
Illustration with the permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.



Choix de la période? l'ordre de σ.

Modélisation du mélange

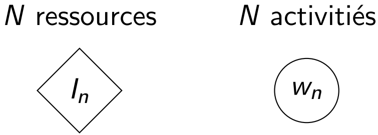
Illustration with the permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$.



Choix de la période? l'ordre de σ.

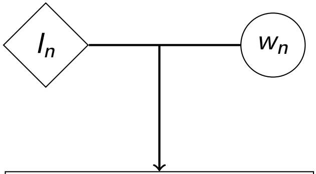
Re-distribution de la lumière.

Problème d'allocation des ressources périodique et dynamique



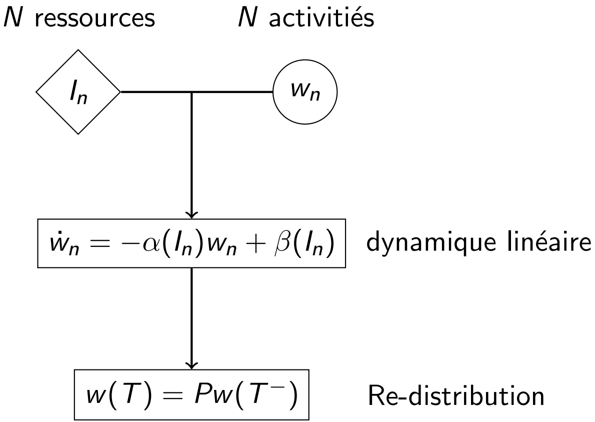
Problème d'allocation des ressources périodique et dynamique

N ressources N activitiés

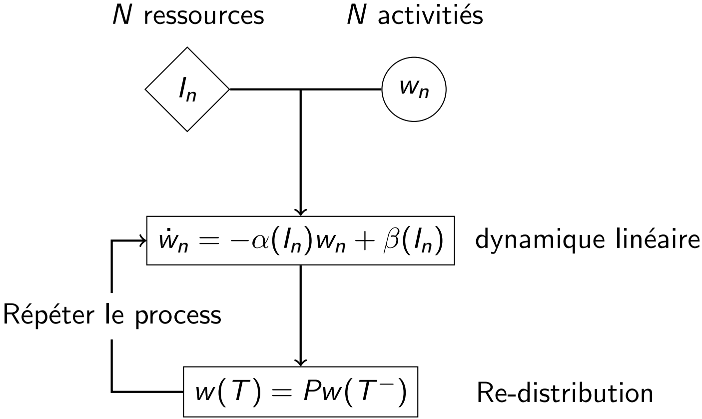


$$\boxed{\dot{w}_n = -\alpha(I_n)w_n + \beta(I_n)}$$ dynamique linéaire

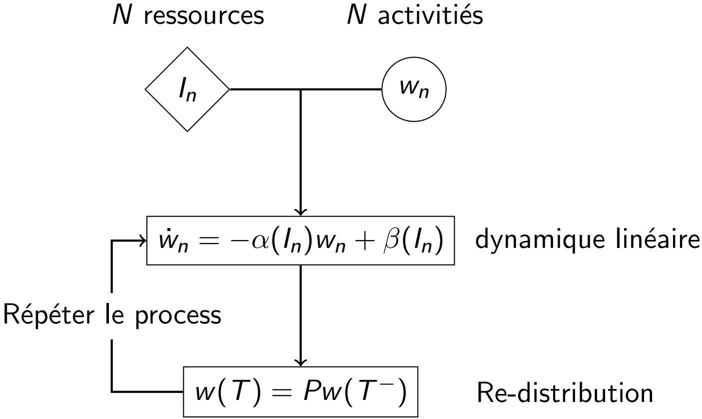
Problème d'allocation des ressources périodique et dynamique



Problème d'allocation des ressources périodique et dynamique



Problème d'allocation des ressources périodique et dynamique



Theorem (Une période est suffisante)

Si w est KT-périodique (i.e., $w(T_K) = w(T_0)$), alors w est $T-$périodique.

Problème d'optimisation

Fonction de coût

$$\max_{P\in\mathcal{P}} J(P) := \max_{P\in\mathcal{P}} \langle u, (\mathcal{I}_N - PD)^{-1} P v\rangle,$$

deux vecteurs u, v et une matrice diagonale D tout dépendent de $(I_n)_{n=1}^{N}$.

Problème d'optimisation

Fonction de coût

$$\max_{P\in\mathcal{P}} J(P) := \max_{P\in\mathcal{P}} \langle u, (\mathcal{I}_N - PD)^{-1} Pv \rangle,$$

deux vecteurs u, v et une matrice diagonale D tout dépendent de $(I_n)_{n=1}^N$.

Remark

Étant donné que $\#\mathfrak{S} = N!$, ce problème ne peut pas être abordé dans les cas réalistes où de grandes valeurs de N doivent être prises en compte, par exemple pour conserver une bonne précision numérique.

Problème d'optimisation

Fonction de coût

$$\max_{P\in\mathcal{P}} J(P) := \max_{P\in\mathcal{P}} \langle u, (\mathcal{I}_N - PD)^{-1} Pv\rangle,$$

deux vecteurs u, v et une matrice diagonale D tout dépendent de $(I_n)_{n=1}^N$.

Remark

Étant donné que $\#\mathfrak{S} = N!$, ce problème ne peut pas être abordé dans les cas réalistes où de grandes valeurs de N doivent être prises en compte, par exemple pour conserver une bonne précision numérique.

Développer la fonction de coût comme

$$\underbrace{\langle u, (\mathcal{I}_N - PD)^{-1} Pv\rangle}_{J(P)} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \langle u, (PD)^{\ell} Pv\rangle = \underbrace{\langle u, Pv\rangle}_{J^{\text{approx}}(P)} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \langle u, (PD)^{\ell} Pv\rangle.$$

Problème d'optimisation

Fonction de coût

$$\max_{P \in \mathcal{P}} J(P) := \max_{P \in \mathcal{P}} \langle u, (\mathcal{I}_N - PD)^{-1} Pv \rangle,$$

Problème simplifié

$$\max_{P \in \mathcal{P}} J^{\text{approx}}(P) := \max_{P \in \mathcal{P}} \langle u, Pv \rangle.$$

Problème d'optimisation

Fonction de coût

$$\max_{P \in \mathcal{P}} J(P) := \max_{P \in \mathcal{P}} \langle u, (\mathcal{I}_N - PD)^{-1} P v \rangle,$$

Problème simplifié

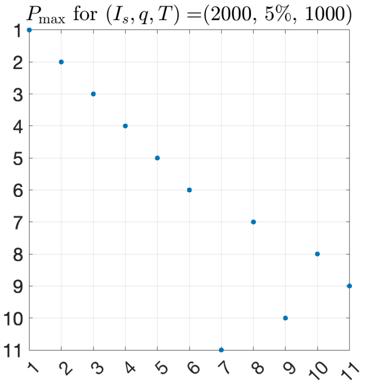
$$\max_{P \in \mathcal{P}} J^{\text{approx}}(P) := \max_{P \in \mathcal{P}} \langle u, P v \rangle.$$

Lemma (matrice optimale du problème simplifié)

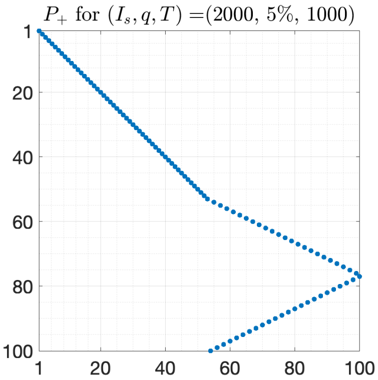
P_+: associe le plus grand coefficient de u au plus grand coefficient de v, le deuxième plus grand coefficient au deuxième plus grand, et ainsi de suite.

P_-: associe le plus grand coefficient de u au plus petit coefficient de v, le deuxième plus grand coefficient au deuxième plus petit, et ainsi de suite.

Matrice optimale

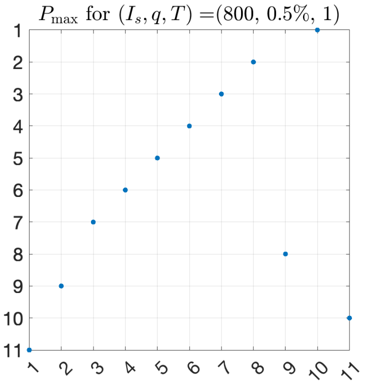


$P_{\max}$ pour $J(P)$

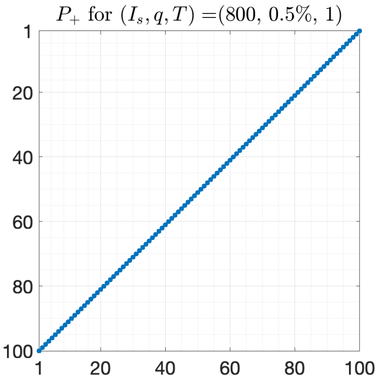


P_+ pour $J^{\text{approx}}(P)$

Matrice optimale



$P_{\max}$ pour $J(P)$



P_+ pour $J^{\text{approx}}(P)$

Qualité de l'approximation

Theorem (Coincidence Criterion: $P_{\max} = P_+$?)

Assume that u and v have positive entries and define

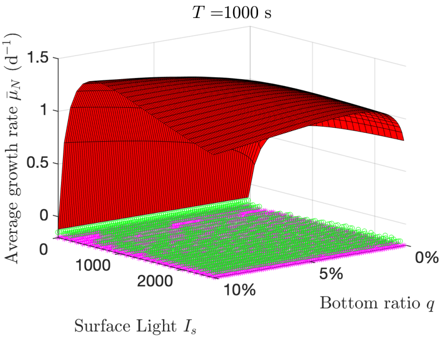
$$\phi(m) := \frac{1}{s_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}} \Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} d_{\max}^{\ell} F_{(\ell+1)m}^{+} - d_{\min}^{\ell} F_{(\ell+1)m}^{-} \Big), \tag{1}$$

where $m := \# \{ n = 1, \dots, N \mid \sigma(n) \neq \sigma_+(n) \}$, $d_{\max} := \max_{n=1,\dots,N}(d_n)$ and $d_{\min} := \min_{n=1,\dots,N}(d_n)$. Assume that:

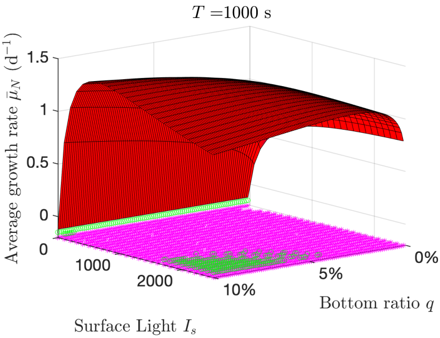
$$\max_{m \geq 2} \phi(m) \leq 1. \tag{2}$$

Then $P_{\max} = P_+$.

Qualité de l'approximation



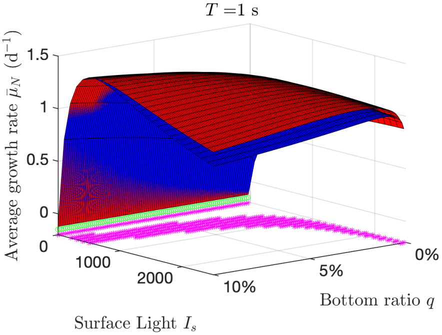
$N = 5$



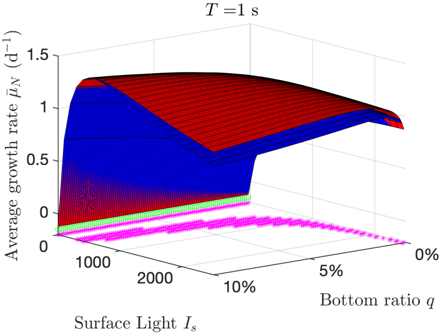
$N = 9$

- $\bar{\mu}_N(P_{\max})$ et $\bar{\mu}_N(P_+)$.
- $P_{\max} = P_+$.
- Critère de coïncidence satisfait.

Qualité de l'approximation



$N = 5$



$N = 9$

- $\bar{\mu}_N(P_{\text{max}})$ et $\bar{\mu}_N(P_+)$.
- $P_{\text{max}} = P_+$.
- Critère de coïncidence satisfait.

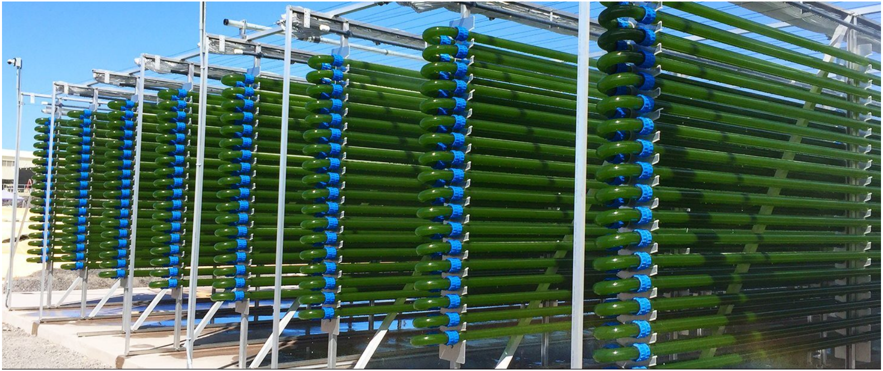


Figure: Tubular reactor

Productivité

- Productivité de biomasse surfacique $\Pi := (\bar{\mu} - R)Xh$.

Productivité

- Productivité de biomasse surfacique $\Pi := (\bar{\mu} - R)Xh$.
- Extinction: expression générale $\varepsilon(X)$.

Productivité

- Productivité de biomasse surfacique $\Pi := (\bar{\mu} - R)Xh$.
- Extinction: expression générale $\varepsilon(X)$.
- *Masci et al. 2010*: condition optimale est $\mu(I(h_{\text{opt}})) = R$ (condition de compensation).

Productivité

- Productivité de biomasse surfacique $\Pi := (\bar{\mu} - R)Xh$.
- Extinction: expression générale $\varepsilon(X)$.
- *Masci et al. 2010*: condition optimale est $\mu(I(h_{\mathrm{opt}})) = R$ (condition de compensation).
- Fonction d'extinction (*Morel 1988*, *Martínez et al. 2018*)

$$\varepsilon(X) := \alpha_0 X^s + \alpha_1, 0 < s < 1.$$

Productivité

- Productivité de biomasse surfacique $\Pi := (\bar{\mu} - R)Xh$.
- Extinction: expression générale $\varepsilon(X)$.
- *Masci et al. 2010*: condition optimale est $\mu(I(h_{\text{opt}})) = R$ (condition de compensation).
- Fonction d'extinction (*Morel 1988*, *Martínez et al. 2018*)

$$\varepsilon(X) := \alpha_0 X^s + \alpha_1, 0 < s < 1.$$

- Modèle de taux de croissance: Haldane

$$\mu(I) = \mu_{\max} \frac{I}{I + \frac{\mu_{\max}}{\theta}(\frac{I}{I^*} - 1)^2}.$$

Productivité

- Productivité de biomasse surfacique $\Pi := (\bar{\mu} - R)Xh$.
- Extinction: expression générale $\varepsilon(X)$.
- *Masci et al. 2010*: condition optimale est $\mu(I(h_{\text{opt}})) = R$ (condition de compensation).
- Fonction d'extinction (*Morel 1988*, *Martínez et al. 2018*)

$$\varepsilon(X) := \alpha_0 X^s + \alpha_1, 0 < s < 1.$$

- Modèle de taux de croissance: Haldane

$$\mu(I) = \mu_{\max} \frac{I}{I + \frac{\mu_{\max}}{\theta}(\frac{I}{I^*} - 1)^2}.$$

- *Productivité optique* $P := (\bar{\mu} - R)Y$ avec le *profondeur optique* $Y := \varepsilon(X)h$.

Productivité

- Productivité de biomasse surfacique $\Pi := (\bar{\mu} - R)Xh$.
- Extinction: expression générale $\varepsilon(X)$.
- *Masci et al. 2010*: condition optimale est $\mu(I(h_{\text{opt}})) = R$ (condition de compensation).
- Fonction d'extinction (*Morel 1988*, *Martínez et al. 2018*)

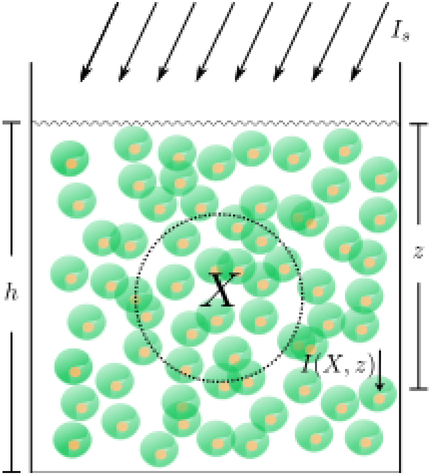
$$\varepsilon(X) := \alpha_0 X^s + \alpha_1, 0 < s < 1.$$

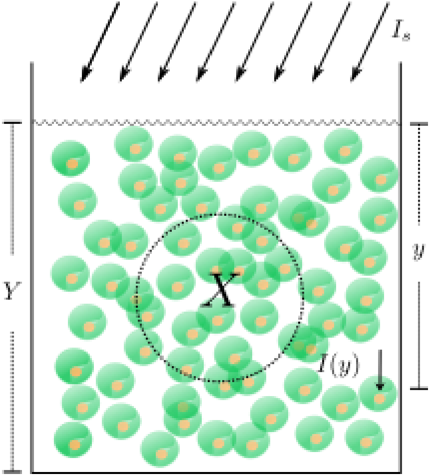
- Modèle de taux de croissance: Haldane

$$\mu(I) = \mu_{\max} \frac{I}{I + \frac{\mu_{\max}}{\theta}(\frac{I}{I^*} - 1)^2}.$$

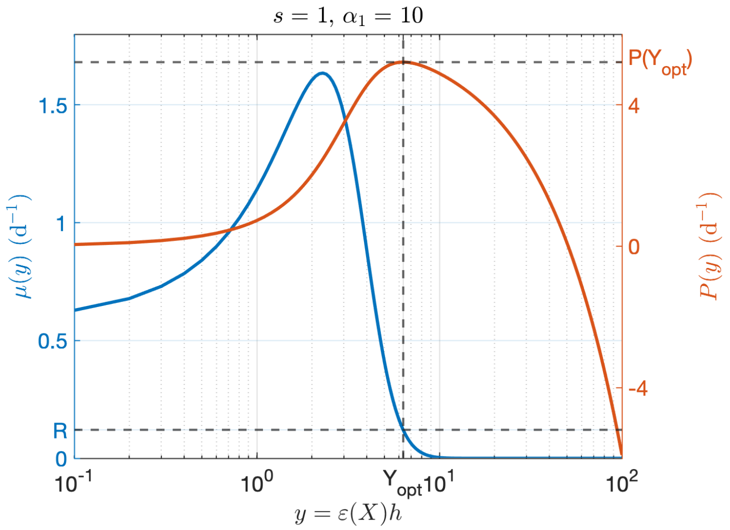
- *Productivité optique* $P := (\bar{\mu} - R)Y$ avec le *profondeur optique* $Y := \varepsilon(X)h$.
- Relation entre deux productivité: $\Pi = \frac{X}{\varepsilon(X)} P$.

Productivité

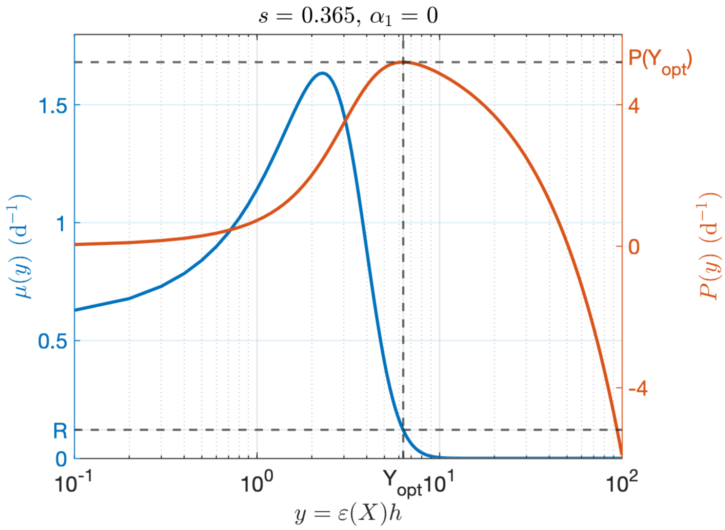




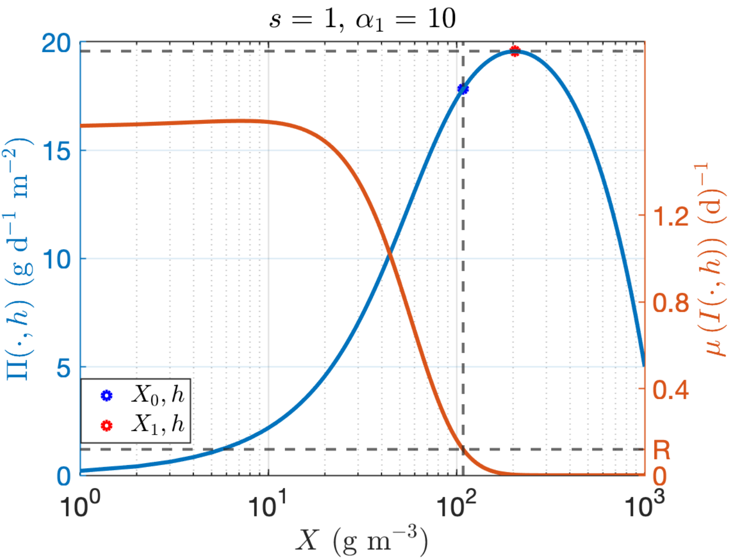
Productivité



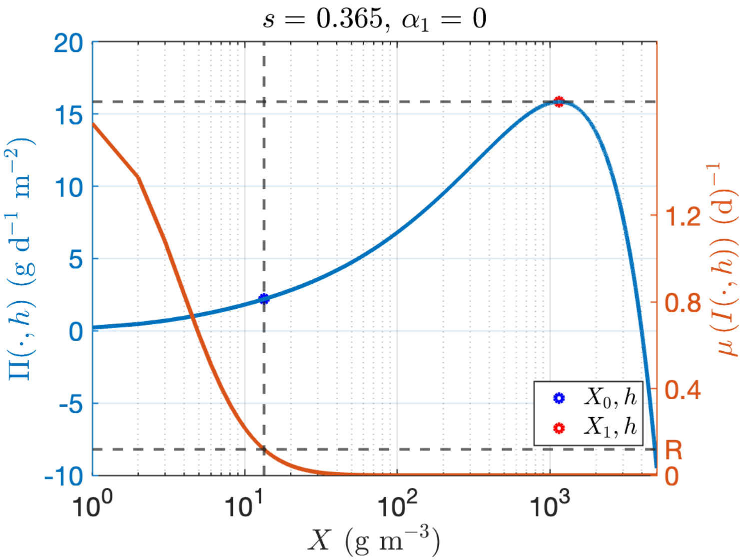
Productivité



Productivité



Productivité



Maximiser la productivité

- Relation entre deux productivité: $\Pi = \frac{X}{\varepsilon(X)} P$.

Maximiser la productivité

- Relation entre deux productivité: $\Pi = \frac{X}{\varepsilon(X)} P$.
- Pour X_0 donné, considérons une suite $(X_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definée par

$$h_n = \frac{Y_{\text{opt}}}{\varepsilon(X_{n-1})}, \quad X_n := \operatorname{argmax}_{X\in\mathbb{R}_+} \Pi(X, h_n).$$

Maximiser la productivité

- Relation entre deux productivité: $\Pi = \frac{X}{\varepsilon(X)} P$.
- Pour X_0 donné, considérons une suite $(X_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definée par

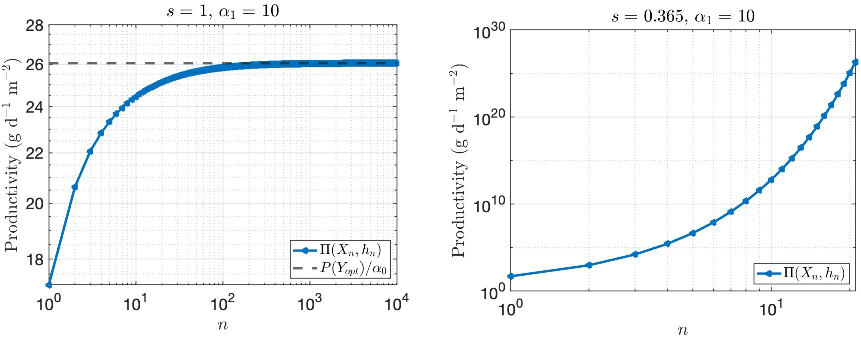
$$h_n = \frac{Y_{\mathrm{opt}}}{\varepsilon(X_{n-1})}, \quad X_n := \mathrm{argmax}_{X\in\mathbb{R}_+} \Pi(X, h_n).$$

Theorem

$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \Pi(X_n, h_n) = \begin{cases} \frac{P(Y_{opt})}{\alpha_0}, & s = 1, \\ +\infty, & s < 1. \end{cases}$$

Maximiser la productivité



Contrôller non-linéaire

- Pour un h donné, trouvons $X_{\text{opt}}(h)$.

- Pour un h donné, trouvons $X_{\mathrm{opt}}(h)$.
- Evolution de la concentration de biomasse $\dot{X} = (\bar{\mu} - R - D)X$.

Contrôller non-linéaire

- Pour un h donné, trouvons $X_{\text{opt}}(h)$.
- Evolution de la concentration de biomasse $\dot{X} = (\bar{\mu} - R - D)X$.

Proposition

La loi de contrôle

$$D = \begin{cases} D_{\max} & X \geq \bar{X} \\ (\bar{\mu}(X,h) - R)\frac{X}{X^{\star}} & X < \bar{X} \end{cases}$$

stabilise globalement l'évolution de X vers le point ciblé $X^{\star}$.

Contrôller non-linéaire

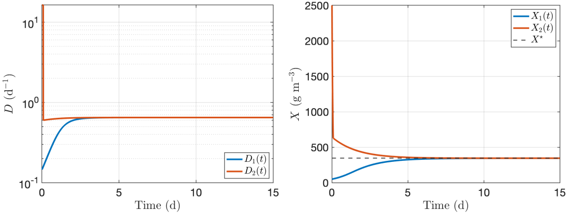
- Pour un h donné, trouvons $X_{\text{opt}}(h)$.
- Evolution de la concentration de biomasse $\dot{X} = (\bar{\mu} - R - D)X$.

Proposition

La loi de contrôle

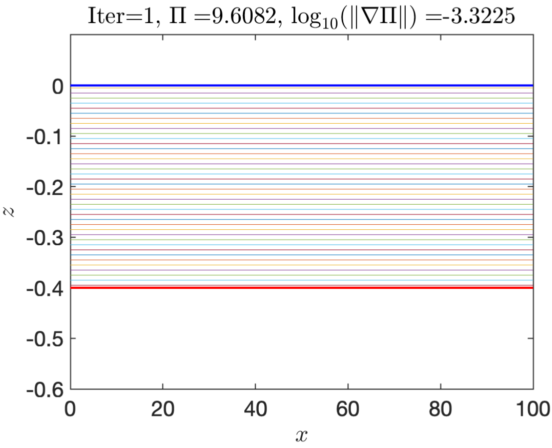
$$D = \begin{cases} D_{\max} & X \geq \bar{X} \\ (\bar{\mu}(X,h) - R)\frac{X}{X^\star} & X < \bar{X} \end{cases}$$

stabilise globalement l'évolution de X vers le point ciblé $X^\star$.



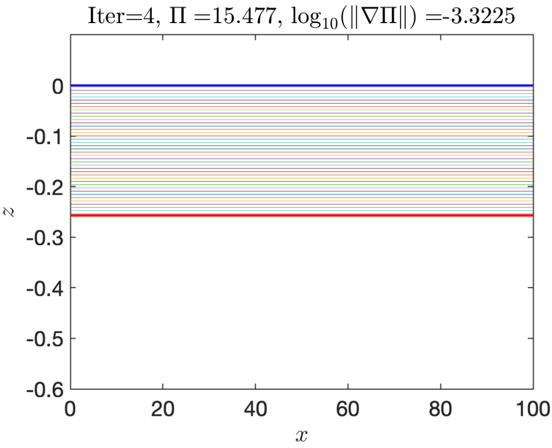
Optimiser profondeur, topographie et mélange

- Profondeur initial: $h = 0.4\,\mathrm{m}$.
- Topographie initial: plate.



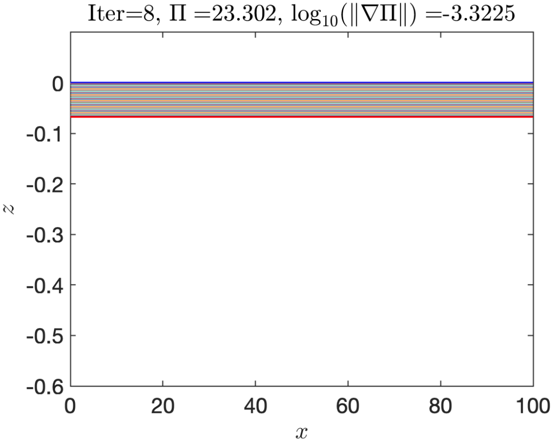
Optimiser profondeur, topographie et mélange

- Profondeur initial: $h = 0.4\,\text{m}$.
- Topographie initial: plate.



Optimiser profondeur, topographie et mélange

- Profondeur initial: $h = 0.4\,\mathrm{m}$.
- Topographie initial: plate.

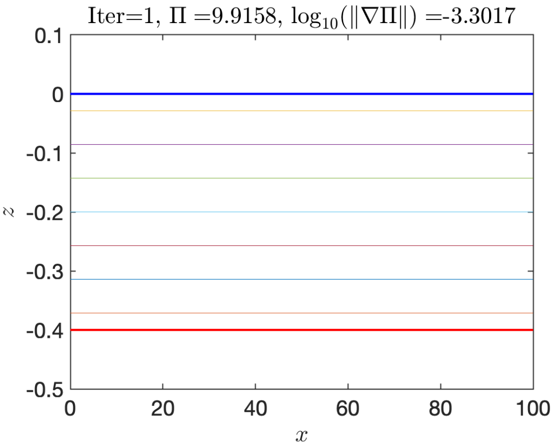


Optimiser profondeur, topographie et mélange

- Nombre de trajectorie: $N_z = 7$.
- Profondeur initial: $h = 0.4\,\mathrm{m}$.
- Topographie initial: plate.

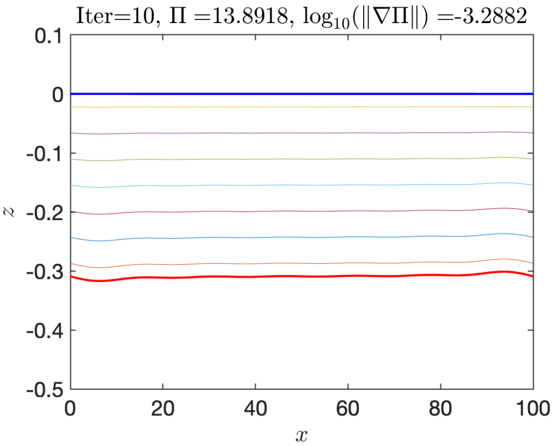
$$P_{\max}^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nombre de trajectorie: $N_z = 7$.
- Profondeur initial: $h = 0.4\,\mathrm{m}$.
- Topographie initial: plate.



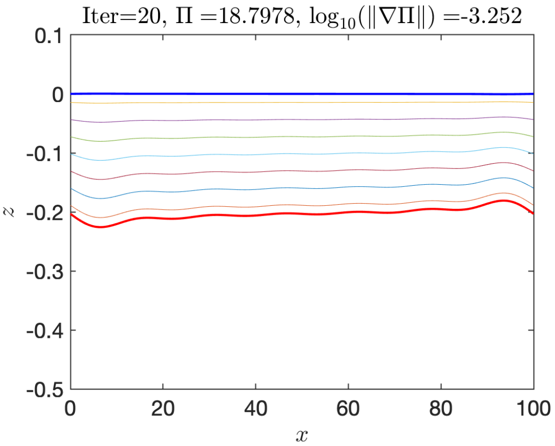
Optimiser profondeur, topographie et mélange

- Nombre de trajectorie: $N_z = 7$.
- Profondeur initial: $h = 0.4\,\text{m}$.
- Topographie initial: plate.



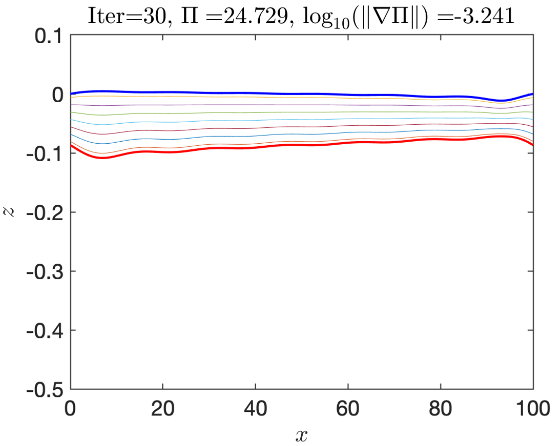
Optimiser profondeur, topographie et mélange

- Nombre de trajectorie: $N_z = 7$.
- Profondeur initial: $h = 0.4\,\mathrm{m}$.
- Topographie initial: plate.



Optimiser profondeur, topographie et mélange

- Nombre de trajectorie: $N_z = 7$.
- Profondeur initial: $h = 0.4\,\mathrm{m}$.
- Topographie initial: plate.



Conclusion

- Topographie:

  Plate dans le cas périodique, et non-plate avec limitée augmentation.
- Mélange:

  Différentes allures selon les paramètres.
- Profondeur / concentration:

  Forte concentration avec petit profondeur.
- Gain:

Topographie	Mélange	Profondeur
≈ 1 %	≈ 30 %	≈ 100 %

Merci pour votre attention !